ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Définitions et notations

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, on lui associe l'équation différentielle

$$y' - y + f = 0. \qquad (\mathcal{E}_f)$$

Le but du problème est d'étudier des conditions d'existence de solutions bornées de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$, et lorsque ces conditions sont remplies, certaines propriétés des ces solutions sont ensuite étudiées.

I. Exemples et résultats généraux

1. **Un premier exemple**

   Soient α un réel et f_α la fonction $x \longmapsto e^{\alpha x}$.

   (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$. Cette équation possède-t-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$?

   (b) Ici on suppose que $\alpha \neq 1$.

      i. Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$.

      ii. À quel condition nécessaire et suffisante sur α cette équation admet-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$? Lesquelles ?

   (c) L'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$ admet-elle des solutions bornées sur $\mathbb{R}$?

2. **Résultats généraux**

   (a) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$?

   (b) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont de la forme

   $$y_\lambda : \; x \longmapsto e^x\Big(\lambda - \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt\Big), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   (c) On suppose que la solution y_λ est bornée au voisinage de $+\infty$. Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt$ est convergente et vaut λ.

   (d) Combien de solutions bornées au voisinage de $+\infty$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ peut-elle avoir au maximum ?

(e) On suppose maintenant que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt$ est convergente et on pose

$$\lambda_f = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt \quad \text{et} \quad Y_f = y_{\lambda_f}.$$

i. Vérifier que, pour tout réel x, $\quad Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt.$

ii. La solution Y_f est-elle nécessairement bornée au voisinage de $+\infty$?

(f) On suppose ici que f est bornée.

i. Montrer que Y_f est bien définie et que c'est l'unique solution bornée, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

ii. Si en outre f tend vers 0 en $+\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $+\infty$.

iii. Si maintenant f tend vers 0 en $-\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $-\infty$.

3. **Un autre exemple**

On pose

$$u_{n,p}(x) = (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!} \frac{x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (n,p) \in \mathbb{N}^2.$$

(a) Montrer que, pour tout réel x, la suite double $\big(u_{n,p}(x)\big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

(b) En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}$, où

$$a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dans la suite on pose $\quad u(x) = e^x \sin(e^x), \; x \in \mathbb{R}.$

(c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} u(t)\, dt$ est convergente.

(d) Montrer que, pour tout réel x, $\int_x^{+\infty} e^{-t} u(t)\, dt = \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta$

(e) En faisant une intégration par partie dans l'intégrale du second membre de l'égalité précédente, montrer que la solution Y_u de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_u)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

II. CAS D'UNE FONCTION INTÉGRABLE

A- Cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}$

On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout réel x,

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que la fonction G est continue, bornée et tend vers 0 en $-\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.

3. Montrer alors que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |Y_f(x)| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|\, dt,$$

puis en déduire que Y_f est bornée sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$.

4. Montrer que $Y_f = -G + Y_G$ et conclure que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.

5. Justifier que la solution $Y_{|f|}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{|f|})$ est bornée et tend vers 0 en $\pm\infty$.

6. Montrer alors que $Y_{|f|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

7. En déduire que Y_f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

8. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et intégrables sur $\mathbb{R}$; on le muni de la norme N_1 définie, pour tout élément g de E , par
$$N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt.$$
Montrer que l'application $\Phi :\ g \longmapsto Y_g$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

B- Cas où l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge

On suppose ici que f possède une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout réel x,
$$F(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

1. Montrer que la fonction F est continue, bornée et tend vers 0 en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt$ est convergente et que
$$e^x \int_{x}^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt = F(x) - Y_F(x).$$
(*on pourra faire une intégration par partie*)

3. En déduire que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.

4. Montrer que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.

5. Montrer alors que Y_f possède une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$, égale à celle de f.

III. CAS D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

On suppose ici que f est 2π-périodique.

1. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution bornée qui est la fonction Y_f.

2. Montrer que Y_f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Calculer les coefficients de FOURIER complexes de Y_f en fonction de ceux de f.

4. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = Y_{f_n},\ n \geqslant 0$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficient de FOURIER complexes de f_n en fonction de ceux de f_1.

(b) Montrer que la série de FOURIER de f_1 est normalement convergente.

(c) En déduire la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big)$.

(d) En utilisant le théorème de DIRICHLET, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - c_0(f)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big).$$

(e) Quelle conclusion concernant le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-on tirer de ce qui précède ?

FIN DE L'ÉPREUVE